

**Paris School of International  
Affairs**

**Outils quantitatifs niveau I**

**Examen**

**Mai 2016**

**Durée : 3 h**

*Toute calculatrice (voire plusieurs modèles différents) est autorisée.*

*L'usage d'un ordinateur portable et des logiciels associés est autorisé dès lors que l'ordinateur est à alimentation autonome. On notera que beaucoup d'exercices ne nécessitent pas l'usage de l'ordinateur mais simplement d'une calculatrice.*

*Les étudiants doivent composer dans la langue (anglais ou français) dans laquelle ils ont suivi l'enseignement.*

*En cas de difficultés de compréhension du sujet en français, les étudiants non francophones peuvent demander aux surveillants, la communication temporaire du sujet en langue anglaise.*

1. **(1 point)** Un bien est taxé à 20% sur le prix hors taxe (HT). Quel est le taux de la taxe sur le prix toutes taxes comprises ?

$$\text{TTC} = 1,20 \text{ HT} \quad \text{HT} = 0,833 \text{ TTC} \quad \dots 16,7\%$$

2. **(2 points)** Soit la règle électorale suivante d'une élection à la proportionnelle « avec prime ». Le parti en tête, en pourcentage des suffrages exprimés, a la moitié des députés et a, en plus, à la proportionnelle, un pourcentage de l'autre moitié des députés, en proportion de son pourcentage des suffrages exprimés.

Les autres partis se partagent l'autre moitié des députés selon leur pourcentage des suffrages exprimés.

Les suffrages exprimés, ce sont le nombre d'inscrits moins les abstentions, les votes blancs et nuls.

Il y a trois partis A, B, C. le nombre de députés à élire est de 400.

Le parti A obtient 42% des inscrits.

Le parti B obtient 24% des inscrits.

Le parti C obtient 18% des inscrits.

Il y a 16% d'abstentions, blancs et nuls.

- a) Quel est le pourcentage des suffrages exprimés obtenus par les partis A, B, C ?

**Exprimés : 84% des inscrits**

**% des exprimés : A=42/84 = 50% B=24/84=28,57% C=18/84=21,43%**

- b) Combien chaque parti a-t-il de députés ? On arrondira à l'entier le plus proche.

**Sièges : A 0,50\*200+200 = 300**

**B = 0,2857\*200 = 57,14 arrondi à 57**

**C = 0,2143\*200 = 42,86 arrondi à 43**

3. **(2 points)** On donne le barème d'impôt à taux marginal sur le revenu par tranche.

Revenu	0 - 100	100 - 400	400 - 1000	1000 - 2000	2000 - 5000	Plus de 5000
Taux	0%	10%	20%	30%	40%	50%

a) Quel est l'impôt payé par un individu dont le revenu est  $R = 3000$  ?

$$R = 3000 = 100 + 300 + 600 + 1000 + 1000$$

$$I = 0 + 30 + 120 + 300 + 400 = 850$$

b) Le gouvernement décide que les revenus entre 100 et 400 ne seront pas imposés (taux 0%). Quel est l'impact sur les différents contribuables ? expliquez littérairement et de façon précise cet impact.

**Ceux qui ont  $R < 400$  : impôt = 0**

**Les autres voient leur impôt baisser de :  $0,1 \cdot (400 - 100) = 30$**

4. (2 points) Le PIB d'un pays entre l'an 1 et l'an 3 passe de 4000 unités monétaires à 4800 unités monétaires. Entre l'an 1 et l'an 3, soit 2 ans, l'inflation a été de 10%.

a) Quel a été le taux de croissance (en volume) sur 2 ans ?

$$4800/4000 = 1,2 \dots \text{Taux de croissance en valeur : } 20\%$$

$$1,2/1,1 = 1,0909 \dots \text{Pour le volume sur 2 ans}$$

b) Quel a été le taux de croissance moyen annuel ?

$$(1,0909)^{1/2} = 1,0445 \quad 4,45\% \text{ en moyenne, en volume par an.}$$

5. (2 points) On étudie les salaires au sein d'une entreprise et on a déterminé les déciles ( $D_1, D_2, \dots, D_9$ ), les quartiles ( $Q_1, Q_2, Q_3$ ) et la médiane. Les salaires évoluent entre 1000 et 10000.

Quantile	$D_1$	$Q_1$	$M_e$	$D_8$	$D_9$
Salaire	1500	2500	4000	7000	9000

a) Après avoir reconstitué l'étude des salaires par « tranche de salaire », on calculera le salaire moyen

**Reconstitution du tableau**

Salaires	%	$x_i$
1 000 – 1 500	10%	1250
1 500 – 2 500	15%	2000
2 500 – 4 000	25%	3250
4 000 – 7 000	30%	5500
7 000 – 9 000	10%	8000
9 000 – 10 000	10%	9500

**Moyenne :  $\bar{x} = 4\,637,5$**

b) Quel est l'écart-type des salaires de cette distribution ?

**Ecart-type :  $\sigma = 2\,527,9$**

6. (2 points) Une entreprise porte à l'escompte une traite de valeur nominale 25000€ et cela 49 jours avant l'échéance. Le taux de l'escompte : 4%.

a) Quel est le montant de l'escompte ?

$$E_c = 25\,000 \cdot 0,04 \cdot (49/360) = 136,11$$

b) Quelle est la valeur commerciale (valeur nominale moins escompte commercial) de la traite ?

$$V_c = V_0 - E_c = 25\,000 - 136,11 = 24\,863,89$$

c) Quel est le taux actuariel (le taux effectif) de l'escompte commercial ?

$$I_a = (136,11/24863,89) \cdot (360/49) = 0,4022 \dots \dots \dots 4,022\%$$

7. (2 points) Une somme est placée à intérêts composés et double en 10 ans

a) Quelle est la durée nécessaire pour qu'elle triple ? (elle est multipliée par 3)

$$S_{10} = S_0 (1+i)^{10} = 2 \cdot S_0 \dots \dots \dots (1+i)^{10} = 2 \dots \dots 10. \ln(1+i) = \ln(2)$$

$$S_n = S_0 (1+i)^n = 3 \cdot S_0 \dots \dots \dots (1+i)^{10} = 2 \dots \dots 10. \ln(1+i) = \ln(2)$$

$$n = 10 \cdot \ln(3) / \ln(2) = 15,8 \text{ ans}$$

b) Au bout de combien de temps a-t-elle quadruplé ? (est-elle multipliée par 4)

**Quadrupler c'est doubler « le doublement »  $n = 20$  ans**

8. (5 points) On donne la répartition de salaires suivante au sein d'une entreprise.

Salaires (€)	Effectifs
de 10000 à moins de 20000	200
de 20000 à moins de 30000	800
de 30000 à moins de 50000	180
de 50000 à moins de 90000	20

Déterminer et donner la signification des éléments suivants :

- a) Le salaire moyen **moyenne = 26 333,33**
- b) Le salaire médian **médiane  $20\ 000 + 10\ 000 \times (400/800) = 25\ 000$**
- c) L'écart type des salaires et le coefficient de variation des salaires  **$\sigma = 9\ 076,83$  CV = 0,34**
- d) Le rapport inter-décile D9/D1  **$D_1 = 16\ 000$  ;  $D_9 = 38\ 890$   $D_9 / D_1 = 2,43$**
- e) Tracer approximativement la courbe de Lorenz de cette distribution. Expliquer à l'aide d'un schéma (sans calcul) comment on peut déterminer le coefficient de Gini.

**Traiter la réponse comme une question de cours**

9. **(2 points)** On étudie l'effet des dépenses de publicité sur le chiffre d'affaires d'une entreprise. On supposera (hypothèse très simplificatrice) que la publicité a un impact immédiat sur les ventes.

Année	1	2	3	4	5	6
Ventes (K€)	18 000	19 200	19 800	20 400	20 000	21 600
Publicité (K€)	102	108	116	124	128	140

- a) Déterminer l'équation donnant le chiffre d'affaires en fonction des dépenses publicitaires en utilisant éventuellement Excel.

$$Y = 84,82 x + 4827,38$$

- b) Donner la valeur du coefficient de détermination  $R^2$  et préciser son interprétation.

**$R^2 = 0,891$  . La variation de la publicité explique (mathématiquement) 89 % de la variation des ventes.**

**On pourra valoriser la réponse disant que, en réalité, la publicité a un impact différé sur les ventes. (mettre 0,5 point de plus, même si cela revient à noter sur 20,5)**